Мы будем рассматривать ДУ второго порядка (именно они чаще всего встречаются в фезеке). Для краткости будем обозначать их как Д2У.
Общий вид уравнения такой:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1x_2}, \ldots, u_{x_ix_j}, \ldots, u_{x_nx_n}) = 0$$

Но, конечно, он слишком общий! Мы с таким работать не сможем.
К счастью, в физике, как правило, встречаются его частные случаи. Например, это ЛИНЕЙНОЕ ДУ:

Определение 5.0.1. *Уравнение называется линейным, если оно линейно относительно u и ее производных:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

где a_{ij}, b_i, c — функции только $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Где все вторые производные тусят отдельно, первые производные тусят отдельно и сами иксы тусят отдельно.

Ну линейное уравнение – это прям если совсем фартануло. Иногда бывает, что не очень фартует, и приходится решать КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДУ:

Определение 5.0.2. *Уравнение называется квазилинейным, если:*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + F(x_1, x_2, \ldots, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$.

Потренируемся на примерах, любезно подобранных автором.
$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+\lambda u=0$ (λ – уравнение), u – функция переменных x,y,z
Естественно, оно линейное: коэффициенты при всех uшках константы (единица), лямбда тоже константа.

$u_{xx}u_{yy}+\lambda u=0$, u – функция переменных x,y
Несмотря на простоту, мы видим произведение частных производных, что уже говорит о том, что данное ДУ не является даже квазилинейным (а уж тем паче линейным).

$u_{xx}^2+\lambda u=0$

Опять даже не квазилинейное уравнение – вторая производная в квадрате.

$u_{xx}+2u_{yy}-u_{zz}+2u_{yz}-3u_y-\pi*u=0$, u – функция переменных x,y,z
Линейное ДУ.

$z*u_{xx}+2u_{yy}-u_{zz}+2u_{yz}-3u_y-\pi*u=0$, u – функция переменных x,y,z
Коэффициент при одной из вторых производных перестал быть константой, но он не зависит от других вторых производных. В этом случае уравнение, хоть и не будет линейным, будет квазилинейным.

$(x-u_z)*u_{xx}+2u_{yy}-u_{zz}+2u_{yz}-3u_y-\pi*u=0$, u – функция переменных x,y,z
Да пусть от зависит и от x, y, z, и от первых производных, лишь бы только не от вторых. Уравнение квазилнейное.

$(x-\sin(u_z-y^2))*u_{xx}+2*\ln(u_x-5y)*u_{yy}-u_{zz}+2u_{yz}-3u_y-\pi*u=0$, u – функция переменных x,y,z
И пусть эти коэффициенты перед вторыми производными будут максимально нелинейными! Лишь бы не только содержали в себе этих самых вторых производных. Уравнение квазилинейное!

$(x-\sin(u_z-y^2))*u_{xx}+2*\ln(u_x-5y)*u_{yy}-u_{zz}+2*(u_{xz}-u_x)u_{yz}-3u_y-\pi*u=0$, u – функция переменных x,y,z
Тревога! Перед u_{yz} обнаружился коэффициент, зависящий от другой второй производной. Это недопустимо для квазилинейного уравнения. Это ДУ квазилинейным не является.

Теперь рассмотрим классификацию на примере КВАЗИЛИНЕЙНЫХ Д2У (КЛД2У) с ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ:

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f(x,y)$$

Пока положим f(,) равным тождественному нулю.
Что у нас получилось? Вам не кажется, что начинает очень сильно попахивать ангемом и кривыми второго порядка? (Собсна, не зря линейные Д2У с двумя переменными делятся на эллиптические, параболические и гиперболические).
Мы с вами знаем, что если дано уравнение
$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0$
То мы можем сделать линейное преобразование так, чтобы в новых координатах p и q уравнение записалось просто:
$(p/a)^2+(q/b)^2=1$ (если эллипс)
$(p/a)^2-(q/b)^2=1$ (если гипербола)

$q=b+(p/a)^2$ (если парабола).
А нельзя ли такой трюк проделать и здесь?

Мы хотим заменить переменные x и y на… Боголюбов вводит греческие буквы, к сожалению, мне тоже придётся их ввести: $\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y)$
И рассматривать ЛД2У не как относительно u(x,y), а как относительно u(ξ, η)?
Естественно, замена $\xi = \varphi(x,y),\ \eta = \psi(x,y)$ должна быть хорошей, с неравным нулю якобианом, чтобы было и обратное преобразование:
$x = x(\xi,\eta),\ y = y(\xi,\eta)$

Вопрос от Жака Фр… Александра Боголюбова: как сделать такую замену, чтобы исходное КЛД2У приняло как можно более простой вид?

Сразу замечу, что сослаться на 1 семестр и воспользоваться тамошними методами в лоб не получится. Вот если бы у нас было бы уравнение
$a_{11}u_x^2+2a_{12}u_xu_y+a_{22}u_y^2+b_1u_x+b_2u_y+c=0$
Тогда да.
А у нас
$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x,y)$$
Это всё же немного другое.

Делать нечего: записываем u как сложную функцию $u(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$
Аккуратно считаем все её производные
$$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x$$
$$u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}$$
И подставляем в исходное уравнение.
Сразу же скажу, что в конспекте Teach-in опечатка:
$$\bar{a}_{22}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{22}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0$$
Конечно же, должно быть вот так вот:

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} + F = 0$$

Где

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2$$

Ну и гадость. Что неудивительно, потому что замену мы сделали совершенно произвольную. Теперь попытаемся сделать её не абы какой, а чтобы что-нибудь занулить. Например, a_{11}. Для этого нужно решить следующее ДУ:

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0$$

Превосходно! Чтобы решить одно ДУ, нужно решить ещё одно ДУ. Ну это хоть попроще немного, оно однородное, да и слагаемых в нём три, а не шесть или семь. Но как его решать?

У него есть брат - характеристическое уравнение. Вот оно:

$$a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$$

Как его получить? Запишем исходное уравнение вот так вот:

$$a_{11}\frac{\partial z^2}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y} + a_{22}\frac{\partial z^2}{\partial y^2} = 0$$

И сократим на dz^2. После чего домножим на dxdy и как раз получим характеристическое уравнение.

Его решение – неявная функция φ(x,y)=C (т.н. характеристика, это, кстати, вопрос №49), которая и является решением исходного уравнения $a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0$. Верно и обратное: если z(x,y) – решение, то кривая на плоскости OXY, задающаяся уравнением φ(x,y)=C – решение характеристического уравнения.

Характеристическое ур-е $a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$ проще, ведь в нём две переменные, а не три. Решим его. Сперва поделим всё или на dx^2,

или на dy^2. Давайте лучше на dx^2. Получим квадратное уравнение относительно dy/dx, у которого будет два решения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Но тут у нас квадратный корень.. а что у нас с дискриминантом? Больше или меньше он нуля?

Важное определение. Уравнение $a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0$ и его характеристическое уравнение $a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0$ являются уравнениями

1. *гиперболического типа*, если $\Delta(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
2. *эллиптического типа*, если $\Delta(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$
3. *параболического типа*, если $\Delta(M) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$

Замечание. В различных точках плоскости OXY уравнение может иметь разный тип. Рассмотрим уравнение

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$a_{11}=y$, $a_{22}=1$, $y_{12}=0$. Тогда $\Delta(M)=-y$.

При $y<0$ получаем уравнение гиперболического типа, при $y=0$ уравнение параболического типа, при $y>0$ эллиптического.

Но мы будем рассматривать нормальные уравнения, которые всюду одного типа.

Ура, мы ответили на первую половину вопроса 50:

50. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных и напишите для них канонические формы.

Осталось ответить на вторую – про канонические формы. Поехали дальше.

Напомним, ради чего всё это затевалось – ради того, чтобы сделать удачную замену.

1) Гипеболические КЛД2У.
Мы получаем два решения для dy/dx и две кривые φ(x,y)=0 и Ψ(x,y)=0. Как вы понимаете, логично взять в качестве η и ξ именно φ и Ψ. Вспомнив, что

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2$$

У нас занулятся и a_{11} с чертой, и a_{22} с чертой.
А теперь вы только посмотрите, как похорошела Москва при… ой, похорошело исходное дифференциальное уравнение:

$$U_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$, где $$\text{где } \Phi_1 = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{22}}$$

Из трёх частных производных осталась только одна!
Полученное ур-е $$U_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$ наз-ся как раз первой канонической формой КЛД2У гиперболического типа.
А что, есть ещё вторая? Ага. Мы, после того как перешли к новой паре ξ и η, тут же переходим к новой паре переменных – α и β:

$$\xi = \alpha + \beta, \ \eta = \alpha - \beta$$

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \ \beta = \frac{\xi - \eta}{2}$$

Тогда уравнение примет вид

$$\boxed{U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = \Phi_2} \qquad \text{где } \Phi_2 = 4\Phi_1$$

Тут остались две частные производные, зато обе несмешанные, иногда это бывает полезнее. Это вторая каноническая форма гиперболического ЛД2У.

2) Эллиптические КЛД2У.
Я сразу дам каноническую форму эллиптического ЛД2У

$$\boxed{U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \Phi}$$

Потому что его вывод требует небольшой работы с комплексными числами, которые мы все дружно ненавидим.

3) Параболические КЛД2У.
У нас вышло, что корень квадратного уравнения один, просто двойной кратности. Получаем одну характеристику φ(x,y)=0. Её берём в качестве ξ, а в качестве η берём любую функцию, лишь бы у неё всё было хорошо с дифференцированием и она была ЛНЗ от ξ.
В этом случае у нас зануляются a_{11} с чертой и a_{12} с чертой

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$

$$\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\cdot\left(\sqrt{a_{11}}\nu_x + \sqrt{a_{22}}\nu_y\right) = 0$$

Остаётся лишь a_{22} с чертой, и мы получаем

$$\boxed{U_{\eta\eta} = \Phi} \quad \text{где } \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}.$$

Вот мы и расписали 50-й вопрос.

Теперь переходим к случаю многих переменных и вопросам 51-53:
51. Дайте определение уравнений параболического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
52. Дайте определение уравнения гиперболического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
53. Дайте определение уравнения эллиптического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.

Исходное уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + F(x_1,\ldots,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n}) = 0$$
$$\text{где } a_{ij} = a_{ji}, \text{ при } i,j = \overline{1,n}$$

Мы от набора $x_1, x_2, \ldots x_n$ переходим к набору $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, где каждая из ξ – функция $(x_1, x_2, \ldots x_n)$. Естественно, надо позаботиться о том, чтобы новые переменные были независимы, поэтому якобианчик не должен быть нуликом:

$$\frac{D(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0$$

Ну если проделать 100500 подстановок, то можно получить формулы для а-с-чертой:

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{lk}$$

Которые, как и а-без-черты являются коэффициентами при вторых производных

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{a_{kl}} U_{\xi_k\xi_l} + \bar{F}(x_1,\ldots,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n}) = 0$$

Круто! Матрица из n^2 чисел. Какое из n^2 чисел будем занулять?
Есть теорема из линала о преобразовании квадратичной формы, по которой мы линейным преобразованием можем занулить все элементы вне главной диагонали, а их привести к какому-то из множества {-1, 0, 1}.
Причём по другой теореме из линала (т.н. закону инерции) количество положительных, отрицательных и нулей вдоль главной диагонали не меняется, какое бы мы не сделали линейное преобразование. Поэтому тип КЛД2У определяется именно элементами на главной диагонали. Какой матрицы – исходной или конечной? Не важно, по закону инерции количество положительных, отрицательных или нулей будет и там, и там одинаково.

Если среди них есть хотя бы ноль – параболического.
Если все n элементов главной диагонали одного знака – уравнение эллиптическое.
Если n-1 одного знака, а один другого – нормального гиперболического.
Если n-m одного знака, а m другого – ультрагиперболического (m>1, естественно).
На самом деле нормальное гиперболическое является частным случаем ультрагиперболического при m=1. Не знаю, зачем их разделяют.

Примеры, любезно подобранные автором.
Хрестоматийное и доставшее всех и вся уравнение Лапласа $\boldsymbol{u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0}$ является эллиптическим. Его матрица выглядит как-то так

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ещё пример, уравнение колебаний на прямой

$\boldsymbol{u_{tt}=a^2u_{xx}\ (a>0)}$

Если мы всё перенесём в одну часть

$a^2u_{xx}- u_{tt}=0$

то матрица будет

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Это нормальный гиперболический тип.

Уравнение колебаний во всём пространстве

$\boldsymbol{u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})}$

Перенесём в одну часть и построим матрицу:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Очерёдность переменных в матрице: x, y, z, t)

Тоже нормальный гиперболический тип.

Уравнение теплопроводности не важно где… пусть в пространстве.

$\boldsymbol{u_{t}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})}$

Перенесём в одну часть и построим матрицу:

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

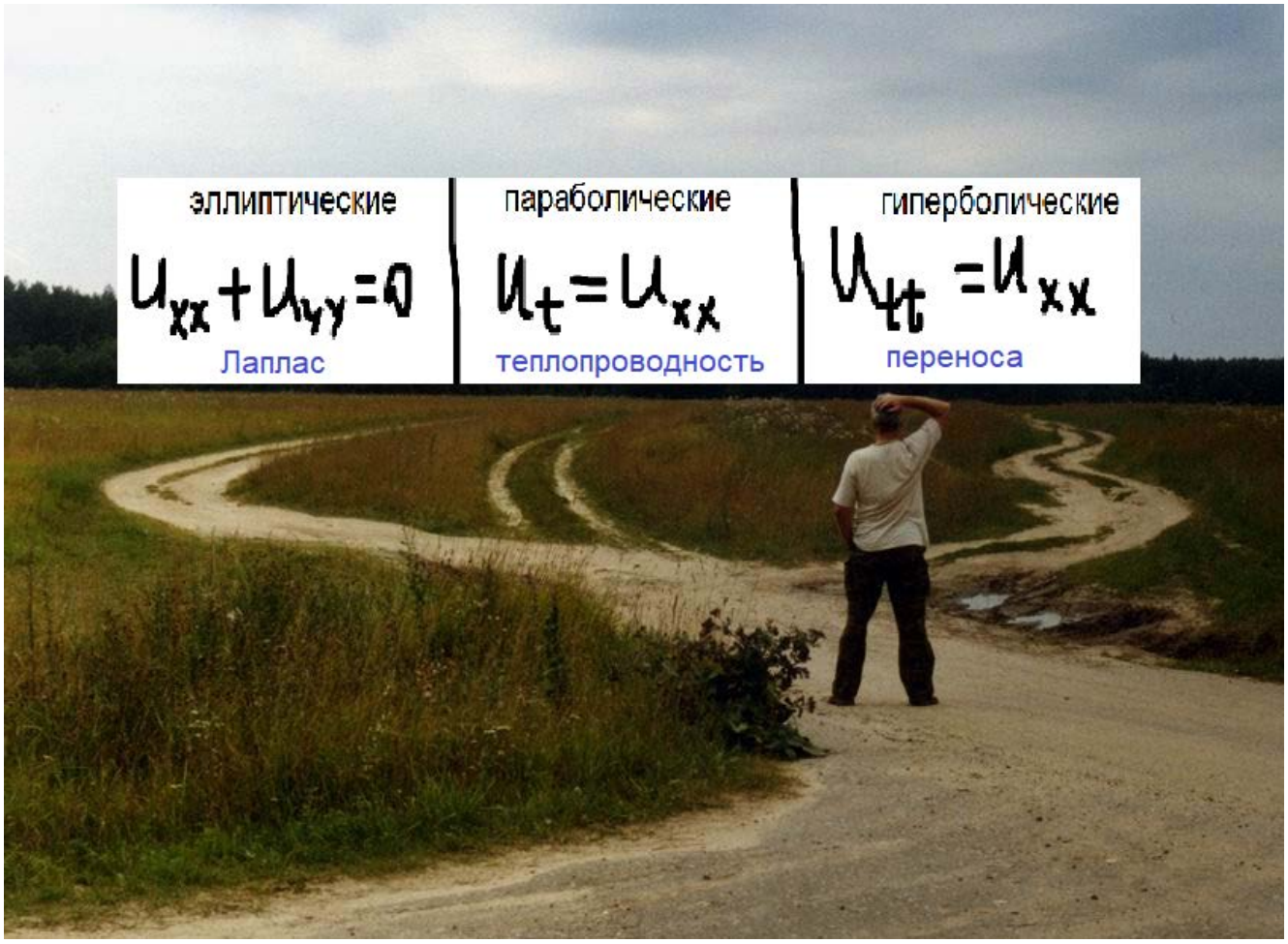
Параболический тип, т.к. на главной диагонали есть ноль.

Про канонические формы скажем чуть позже, а пока

Нафига это нужно?

В физике очень часто всплывают ДУ в ЧП, похожие на те, что мы умеем решать, но не совсем. Так вот наша классификация позволяет понять, к какому ДУ в ЧП приводить и даже прикинуть замену переменной.

Мы только что классифицировали 3 важнейших ДУ в ЧП:



И теперь большинство уравнений, возникающих из физики, приводится к одному из типов – Лапласа, теплопроводности или переноса. Если хотите, называйте их не «эллиптические, параболические, гиперболические», а «приводящиеся к Лапласу, теплопроводности, переноса».

Приведём пример – ДУ в ЧП, которое встречается в одной задаче 8-го семестра, на статфизике:

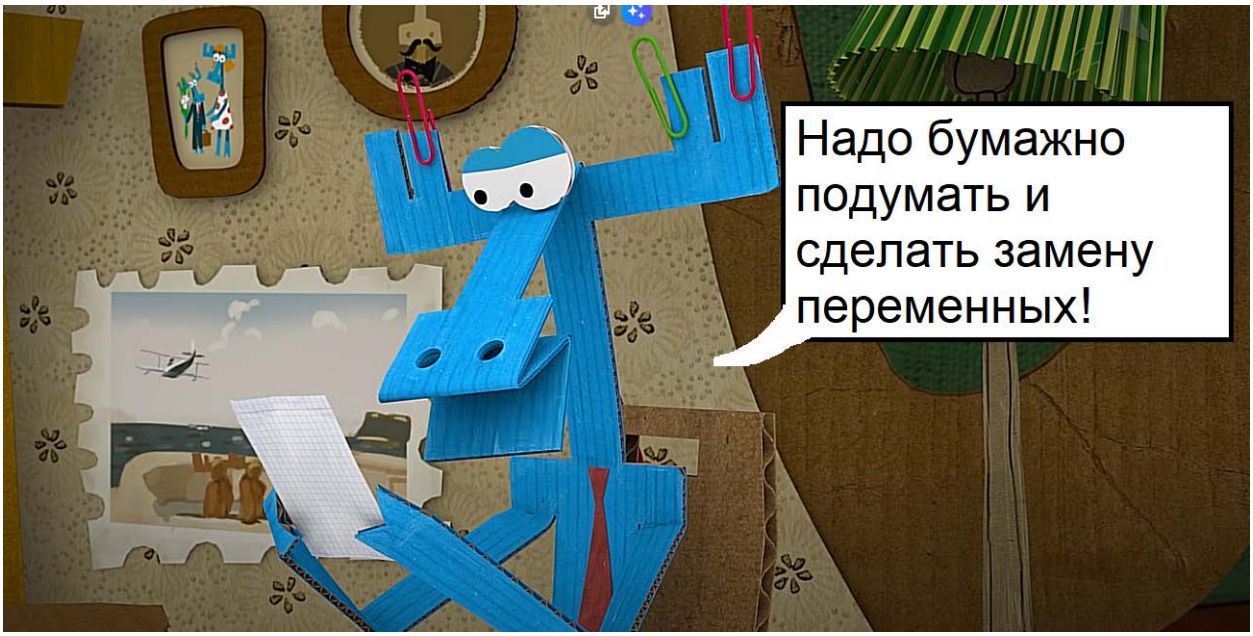
Задача 36.
Найти решение одномерного уравнения Фоккера-Планка в поле сил тяжести $U = mgx$ на бесконечной прямой для брауновской частицы, которая в момент времени $t = 0$ находилась в точке $x = x_0$, определить средние значения $\overline{x}$ и $\overline{(\Delta x)^2}$. Полагая, что положение отсчитывается от реально существующего дна сосуда, сформулировать ограничения на временной интервал t, в течение которого полученное решение имеет физический смысл.

Не углублясь в статфиз, скажем, что надо решить следующее ДУ в ЧП:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x,t)\frac{\partial mgx}{\partial x}\right) = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{mg}{\gamma}\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x}$$

Где $\rho(x,t)$ – плотность вероятности найти частицу в точке x в момент времени t. D, γ - некие параметры, включающие себя температуру и коэф вязкого трения воздуха.

Капитулировать? Мы же русские люди и сделали из стали! Надо свести задачу к предыдущей, а для этого вспомнить Боголюбова, который на лекциях по ММФ советовал делать в этом случае замену.



Сделаем её и мы: $\rho(t,x) = \rho\big(t, y(x,t)\big)$

Тогда:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_y + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_t \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_t \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t$$

И давайте вручную положим $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t = 1$ (т.е. $y(x,t) = x + T(t)$)

Тогда и вторые производные совпададут: $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right)_t = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right)_t$

Давайте это всё подставлять в:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{mg}{\gamma}\frac{\partial \rho(x)}{\partial x}$$

Получим:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_y + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_t \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x = D\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right)_t + \frac{mg}{\gamma}\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_t$$

И видим, что чтобы нам стало хорошо, нам надо положить $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x = \frac{mg}{\gamma}$. Вкупе с $y(x,t) = x + T(t)$ это даст однозначно $y(x,t) = x + \frac{mgt}{\gamma}$

Ну а мы же получаем задачу теплопроводности на прямой

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_y = D\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right)_t$$

Решение которой известно из ММФ:

$$\rho(y,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(y,z,t)\varphi(z)dz$$

Где $G(x,z,t)$ - функция Грина уравнения теплопроводности на прямой:

$$G(y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(y-z)^2}{4Dt}}$$

$$\rho(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-z)^2}{4Dt}} \varphi(z)dz$$

Тоже давайте предположим, что изначально частица была в одной точке, поэтому $\varphi(z) = б(z - y_0)$, поэтому

$$\rho(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4Dt}}$$

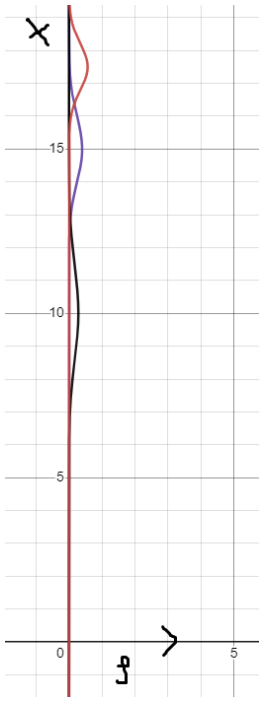
Осталось здесь обратную замену:

$$y = x + \frac{mgt}{\gamma}$$

поэтому

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{\left(x+\frac{mgt}{\gamma}-x_0\right)^2}{4Dt}}$$

Можете поиграться в Десмосе https://www.desmos.com/calculator/cn1hifpbfd (я переобозначил там x и y, чтобы при движении график двигался вниз). Видно, что чем ниже и дальше от точки старта, тем график расплывчатей:



https://www.desmos.com/calculator/oo3ppre0ba

Канонические формы, требуемые в вопросах 51-53.

Для эллипического типа

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_{\xi_k \xi_k} + \Phi = 0}$$

Для параболического типа очень похоже, но раз у нас m нулей, то количество слагаемых сократится с n до n-m:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-m} U_{\xi_k \xi_k} + \Phi = 0}$$

Для гиперболического типа у нас есть как положительные, так и отрицательные, разносим их по разным частям:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} U_{\xi_k \xi_k} = \sum_{k=m+1}^{n} U_{\xi_k \xi_k} + \Phi}$$

А нормальный гиперболический тип – это частный случай при m=1:

$$\boxed{U_{\xi_1 \xi_1} = \sum_{k=2}^{n} U_{\xi_k \xi_k} + \Phi}$$